Mathematik

Beiträge zu einem Variationsproblem von Zermelo.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde bei der Hohen Philosophischen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau

vorgelegt von

Kurt Zita.

Promotion: 5. November 1931.

Breslau 1931.

Druck der Breslauer Genossenschafts-Buchdruckerei, E. G. m. b. H.

Referent: Prof. Dr. Radon.
Korreferent: Prof. Dr. Rademacher.

Examen rigorosum: 10. Juni 1931.

Gedruckt mit Genehmigung der Hohen Philosophischen Fakultät
der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen Eltern gewidmet.

Inhalt.

Einleitung.

1. Teil. Navigation in der Ebene. Allgemeines.

§ 1. Die Aufgabe als Mayersches Problem.

§ 2. Die Aufgabe als einfachstes Variationsproblem.

§ 3. Indikatrix.

2. Teil. Navigation in der Ebene. Beispiele.

§ 4. Gestalt der Bahnkurven $v_1 = 0$, $u_1 = \pm r^n$.

§ 5. Konjugierte Punkte.

§ 6. Sonstige Ergebnisse.

3. Teil. Navigation auf der Kugel.

§ 7. Allgemeines.

§ 8. Beispiele.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Anhang. Figuren.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, in welcher Richtung und auf was für einer Bahn sich ein Luftfahrzeug mit der konstanten Eigengeschwindigkeit c bewegen muß, wenn es in kürzester Zeit von einem Punkte P_1 zu einem Punkte P_2 einer Ebene oder von einem Punkte P_1 zu einem Punkte P_2 einer Kugel gelangen soll. Dabei soll die Windverteilung in der Ebene durch ein Geschwindigkeitsvektorfeld u, v stationär und rotationssymmetrisch festgelegt und auf der Kugel stationär und nur von der geographischen Breite abhängig sein.

Der Gegenstand ist auf der Prager Mathematikertagung vom Jahre 1929 von Zermelo zur Diskussion gestellt und im „Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung“[1] als Variationsproblem allgemein formuliert worden.

Die Aufgabe erfordert die Bestimmung der Steuerrichtung. Dies geschieht durch Behandlung eines Mayerschen Problems:[2] Gegeben sind zwei Differentialgleichungen:

$$F \equiv F\,(x,\ y,\ \vartheta,\ x',\ y',\ t') = 0$$
$$G \equiv G\,(x,\ y,\ \vartheta,\ x',\ y',\ t') = 0.$$

x, y, ϑ sind so zu bestimmen, daß t bei festen Anfangs- und Endwerten von x, y und bei gegebenem Anfangswert von t am Ende ein Minimum wird. Bei Einführung der Lagrangeschen

---

[1] Bd. 39, 5.—8. Heft. Siehe auch: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 11, S. 114.

[2] Kneser: Lehrbuch der Variationsrechnung, 1925, S. 265.

Multiplikatoren λ, μ und der Funktion $H = \lambda F + \mu G$ ist notwendige Bedingung dafür:

$$H_x - H'_{x'} = 0, \quad H_y - H'_{y'} = 0, \quad F = 0,$$
$$H_\vartheta - H'_{\vartheta'} = 0, \quad H_t - H'_{t'} = 0, \quad G = 0.$$

Die Bahnkurven ergeben sich aus einem Variationsproblem der einfachsten Form:

$$\delta t = \delta \int_{(1)}^{(2)} F(x, y, x', y')\, du = 0,^{(3)}$$

das verlangt, zwei gegebene Punkte durch eine solche Kurve zu verbinden, daß t ein Minimum wird. Bedingung dafür ist das Bestehen der Eulerschen Differentialgleichungen:

$$F_x - F'_{x'} = 0, \quad F_y - F'_{y'} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichungen liefert die zweifach unendliche Schar von Extremalen:

$$x = \xi(u, a, b), \quad y = \eta(u, a, b).$$

Als weitere Bedingung für das Vorhandensein wirklicher Extrema tritt zu den Eulerschen Gleichungen zunächst nach Jacobi die folgende:

$$D(u, u_1) = \vartheta_1(u)\,\vartheta_2(u_1) - \vartheta_1(u_1)\,\vartheta_2(u) \neq 0,$$

wo:
$$\vartheta_1(u) = \xi_u \eta_a - \xi_a \eta_u,$$
$$\vartheta_2(u) = \xi_u \eta_b - \xi_b \eta_u.$$

Die Stellen $D(u, u_1) = 0$ liefern für $u \neq u_1$ die sogen. konjugierten Punkte. In ihnen hören die Extremalenbogen auf, Extrema des Integrals t zu geben.

Aber da t Minimum werden soll, müssen auch die Legendresche Bedingung für die Existenz schwacher Minima und die Bedingung von Weierstraß für die starker Minima untersucht werden.

Der erste und zweite Teil der Arbeit beschäftigen sich mit der Navigation in der Ebene, der dritte mit der Navigation auf der Kugel.

---

(3) Kneser: s. o. S. 40.

I. Teil.

Navigation in der Ebene.

Allgemeines.

§ 1.

Die Aufgabe als Mayersches Problem.

Es seien x, y rechtwinklige Koordinaten, t die Zeit, u (x, y, t), v (x, y, t) die Komponenten der Windgeschwindigkeit im Punkte x, y zur Zeit t bezüglich der Koordinaten x, y. c bezeichne die Eigengeschwindigkeit des Fahrzeuges in ruhender Luft und ϑ den Winkel zwischen x-Achse und Steuerrichtung. Dann ist die Absolutgeschwindigkeit des Luftschiffes bestimmt durch die Komponenten:

$$\frac{dx}{dt} = c \cos \vartheta + u\,(x, y, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = c \sin \vartheta + v\,(x, y, t).$$

Einführung eines neuen Parameters liefert die Gleichungen:

$$x' - c \cos \vartheta\, t' - u\, t' = 0$$

$$y' - c \sin \vartheta\, t' - v\, t' = 0.$$

Hier ist Aufgabe, das diesen Gleichungen genügende ϑ bei festen Anfangs- und Endwerten von x, y und gegebenem Anfangswert t_1 als Funktion eines Parameters so zu bestimmen, daß t am Endpunkt ein Minimum wird.

Bei Zugrundelegung von Polarkoordinaten r, φ und den auf Radiusvektor und die Richtung senkrecht dazu bezogenen Windkomponenten u_1 bezw. v_1 wird:

$$u = u_1 \cos \varphi - v_1 \sin \varphi, \quad v = v_1 \cos \varphi + u_1 \sin \varphi.$$

Führt man weiter den Winkel zwischen Radiusvektor und dem Vektor in Steuerrichtung: ϑ_1 ein, so hat man schließlich:

$$F \equiv r' \cos \varphi - \varphi' r \sin \varphi - t' \left[c \cos (\vartheta_1 + \varphi) + u_1 \cos \varphi - v_1 \sin \varphi\right] = 0$$

$$G \equiv r' \sin \varphi + \varphi' r \cos \varphi - t' \left[c \sin (\vartheta_1 + \varphi) + u_1 \sin \varphi + v_1 \cos \varphi\right] = 0.$$

Die Aufgabe kann nun analog wie oben formuliert werden. Sie wird gelöst durch die mit den Lagrangeschen Multiplikatoren λ, μ und der Funktion $H = \lambda F + \mu G$ gebildeten Differentialgleichungen:

$$H_r - H'_{r'}, = 0, \qquad H_\varphi - H'_{\varphi'}, = 0$$

$$H_{\vartheta_1} - H'_{\vartheta_1'}, = 0, \quad H_t - H'_{t'}, = 0,$$

zu denen die Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ treten. Da stationäre Windverteilung zugrundegelegt wird, ist:

$$F \equiv F(r, \varphi, \vartheta_1, r', \varphi', t'), \quad G \equiv G(r, \varphi, \vartheta_1, r', \varphi', t').$$

Es wird:

$$H = r' [\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi] + \varphi' [\mu\, r \cos \varphi - \lambda\, r \sin \varphi] - t' [\lambda\, c \cos (\vartheta_1 + \varphi) + \mu\, c \sin (\vartheta_1 + \varphi) + \lambda\, u_1 \cos \varphi + \mu\, u_1 \sin \varphi - \lambda\, v_1 \sin \varphi + \mu\, v_1 \cos \varphi]$$

und $$- H_{t'} = \lambda\, c \cos (\vartheta_1 + \varphi) + \mu\, c \sin (\vartheta_1 + \varphi) + \lambda\, u_1 \cos \varphi + \mu\, u_1 \sin \varphi - \lambda\, v_1 \sin \varphi + \mu\, v_1 \cos \varphi = a_4$$

$$H_{\vartheta_1} = t'\, c\, [\lambda \sin (\vartheta_1 + \varphi) - \mu \cos (\vartheta_1 + \varphi)] = 0.$$

Daraus folgt:

$$\lambda = \frac{a_4 \cos (\vartheta_1 + \varphi)}{c + u_1 \cos \vartheta_1 + v_1 \sin \vartheta_1}, \quad \mu = \frac{a_4 \sin (\vartheta_1 + \varphi)}{c + u_1 \cos \vartheta_1 + v_1 \sin \vartheta_1}.$$

Also: $$H = a_4 \frac{r' \cos \vartheta_1 + \varphi'\, r \sin \vartheta_1}{c + u_1 \cos \vartheta_1 + v_1 \sin \vartheta_1} - a_4\, t'$$

$$= H(r, \varphi, \vartheta_1, r', \varphi', t').$$

Bei Annahme rotationssymmetrischer Windverteilung werden u_1, v_1 unabhängig von φ und damit ist:

$$H = H(r, \vartheta_1, r', \varphi', t')$$

$$H_{\varphi'} = \frac{a_4\, r \sin \vartheta_1}{c + u_1 \cos \vartheta_1 + v_1 \sin \vartheta_1} = a_2$$

Setzt man $\frac{a_2}{a_4} = a$ und berücksichtigt man die Differentialgleichungen $F = 0$, $G = 0$, so hat man:

$$\frac{r \sin \vartheta_1}{c + u_1 \cos \vartheta_1 + v_1 \sin \vartheta_1} = a$$

und: $$r' (c \sin \vartheta_1 + v_1) = \varphi'\, r\, (c \cos \vartheta_1 + u_1).$$

Aus der vorletzten dieser Gleichungen errechnet man:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{a\, u_1\, (r - a\, v_1) \mp a\, c\, \sqrt{(r - a\, v_1)^2 - a^2\, (c^2 - u_1^2)}}{(r - a\, v_1)^2 - a^2\, c^2},$$

womit für die Steuerrichtung ein allgemeiner Ausdruck gefunden ist.

Im Anschluß hieran läßt sich die Durchlaufungsrichtung der Extremalen besprechen. Es ist nämlich:

$$t' = \frac{r' \cos \varphi - \varphi'\, r \sin \varphi}{c \cos (\vartheta_1 + \varphi) + u_1 \cos \varphi - v_1 \sin \varphi} = \frac{r'}{c \cos \vartheta_1 + u_1}.$$

Also:

$$t_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{c \cos \vartheta_1 + u_1}.$$

Wird demnach die Extremale von einem Punkte ab durchlaufen, wo $r = r_1$ ist, so muß t wachsen. Das ist auf zweierlei Art möglich. Entweder wächst r von r_1 ab, dann muß $c \cos \vartheta_1 + u_1 > 0$ sein. Oder r nimmt von r_1 ab, dann muß $c \cos \vartheta_1 + u_1 < 0$ sein. Daraus ergibt sich: Ist der, aus der Radialkomponente der Eigengeschwindigkeit des Luftfahrzeuges und der Radialkomponente der Windgeschwindigkeit zusammengesetzte Vektor vom Koordinatenmittelpunkt weg gerichtet, so muß die Extremale nach außen hin verfolgt werden. Zeigt dieser Vektor nach dem Koordinatenmittelpunkt hin, so muß man sich dem Koordinatenursprung nähern.

§ 2.

Die Aufgabe als einfachstes Variationsproblem.

Ausgangspunkt bilden die beiden ersten Gleichungen des § 1. Durch Elimination von ϑ folgt:

$$\left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v\right)^2 = c^2$$

oder:

$$dt = \frac{1}{c^2 - u^2 - v^2} \cdot \left[\pm \sqrt{c^2 (dx^2 + dy^2) - (u\, dy - v\, dx)^2} - (u\, dx + v\, dy) \right]$$

Stationäre Windverteilung bedingt, daß die rechte Seite frei von der Zeit t wird, rotationssymmetrische empfiehlt Einführung von Polarkoordinaten und der Komponenten der Windgeschwindigkeit u_1, v_1. Dadurch wird:

$$t' = \frac{1}{c^2 - u_1^2 - v_1^2} \left[\begin{array}{c} \pm \sqrt{c^2 (r'^2 + r^2 \varphi'^2) - (u_1 r \varphi' - v_1 r')^2} \\ - (u_1 r' + r v_1 \varphi') \end{array} \right],$$

wo r und φ so zu bestimmen sind, daß t ein Minimum wird. Dieser Ausdruck hat die Form $t' = F(r, r', \varphi')$. Die Eulerschen Differentialgleichungen lassen eine erste allgemeine Integration zu: $F\varphi' = a$. Ausgeführt ergibt das:

$$F\varphi' = \frac{1}{c^2 - u_1^2 - v_1^2} \cdot$$

$$\left[\frac{\varphi' r^2 (c^2 - u_1^2) - r' r u_1 v_1}{\sqrt{\varphi'^2 r^2 (c^2 - u_1^2) - 2\varphi' r' r u_1 v_1 + r'^2 (c^2 - v_1^2)}} - r v_1 \right] = a$$

oder, wenn man $\sqrt{(r - a v_1)^2 - a^2 (c^2 - u_1^2)} = w$ setzt:

$$d\varphi = \pm \frac{c\, dr}{r w} \left[a - \frac{v_1 (r - a v_1)}{u_1^2 - c^2} \right] - \frac{u_1 v_1}{u_1^2 - c^2} \frac{dr}{r} \cdot$$

Damit ist die Bestimmung der Extremalen auf Quadraturen zurückgeführt.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß die Frage nach der Durchlaufungsrichtung der Extremalen noch einmal im Anschluß an den nächsten Paragraphen erörtert werden wird.

§ 3.

Indikatrix.

Die Entscheidung darüber, ob die Extremalen Minima liefern, gibt die Indikatrix von Caratheodory. Sie ist gegeben durch die Gleichung: $F(x, y, x', y') = 1$,
wo F, die Grundfunktion des Variationsproblems, positiv homogen von der Stufe 1 ist. Sie ist bei festem x, y als Kurve in der x'-y'-Ebene zu deuten. Bei Einführung von Polarkoordinaten durch

$$x' = \rho \cos \Theta, \quad y' = \rho \sin \Theta$$

erscheint sie in der Form:

$$\rho = \frac{1}{F(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta)}.$$

Ist ihr geometrisches Bild bekannt, so kann auf das Erfülltsein der Legendreschen Bedingung für schwache Minima und der hinreichenden Bedingung von Weierstraß für starke Minima geschlossen werden. Es ergeben sich so die folgenden Sätze:[4]

Ist $F(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta) > 0$, so ist $F_1(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta) > 0$ oder < 0, je nachdem die Indikatrix im Punkte $Q(\Theta)$ dem Grundpunkte ihre konkave oder konvexe Seite zukehrt, und es ist

$\mathcal{E}(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta, \cos\widetilde{\Theta}, \sin\widetilde{\Theta}) > 0$ oder < 0, je nachdem der Punkt $\widetilde{Q}(\widetilde{\Theta})$ der Indikatrix auf derselben oder entgegengesetzten Seite der Tangente an die Indikatrix im Punkte $Q(\Theta)$ liegt wie der Grundpunkt. Ist dagegen $F < 0$, so sind die Vorzeichen $>$ und $<$ in den Ungleichungen für F_1 und $\mathcal{E}$ umzukehren.

In dem vorliegenden Falle sind die Indikatrizen immer Kreise:

$$(x' - u)^2 + (y' - v)^2 = c^2.$$

Der Grundpunkt liegt außerhalb dieser Kreise, auf ihnen oder in ihnen, je nachdem $u^2 + v^2 > c^2$, $u^2 + v^2 = c^2$, $u^2 + v^2 < c^2$ ist.

Liegt der Grundpunkt außerhalb der Indikatrix, so ist $\rho > 0$ und damit $F(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta) > 0$ für alle Richtungen, in denen der Radiusvektor Punkte mit dem Kreise gemein hat. Auf Grund der genannten Sätze ist auf dem gegen den Grundpunkt konkaven Kreisbogen $F_1 > 0$ und $\mathcal{E} > 0$, auf dem gegen den Grundpunkt konvexen Kreisbogen dagegen $F_1 < 0$ und $\mathcal{E} < 0$. Für die entgegengesetzten Richtungen ist $F < 0$. Diese müssen ausgeschlossen werden, denn anderenfalls würde man vom Winde zurückgetrieben. Der Wurzel in

$$\rho = u\cos\Theta + v\sin\Theta \pm \sqrt{c^2 - (u\sin\Theta - v\cos\Theta)^2}$$

und damit auch in F muß positives Vorzeichen gegeben werden.

Wenn $u^2 + v^2 = c^2$ ist, liegt der Grundpunkt auf der Indikatrix. In allen Richtungen, die innerhalb des Kreises verlaufen, ist $F > 0$ und $\mathcal{E} > 0$, $F_1 > 0$. In diesen Richtungen bieten

[4] Caratheodory: Mathem. Annalen Bd. 62; Bolza: Vorles. über Var. — r. 1909.

demnach die Extremalen Minima dar. Die Wurzel in F bekommt positives Vorzeichen.

Falls sich der Grundpunkt innerhalb der Indikatrix befindet, sind jeder Richtung $\mathcal{R}$ zwei Punkte der Indikatrix zugeordnet; aber nur einer kommt für Minima in Betracht, nämlich der, in dem $\mathcal{R}$ in positivem Sinne durchlaufen, die Indikatrix durchstößt. Der Wurzel in F muß positives Vorzeichen zugeschrieben werden.

Insgesamt läßt sich aussagen: Die Aufgabe kann auf die mit dem positiven Vorzeichen der Wurzel in F beschränkt bleiben. Es ist nicht immer möglich, von einem Punkt P der x - y - Ebene Extremalen in jeder Richtung ausstrahlen zu lassen, und auch nicht, in jeder Richtung auf den Extremalen fortzuschreiten Im Falle $u^2 + v^2 > c^2$ ist so z. B. nur der den Vektor mit der Richtung Θ_0 : $\operatorname{tg} \Theta_0 = \frac{v}{u}$ enthaltende Winkelraum von der Größe $2\omega = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}$ für Minima der Zeit liefernde Extremalen brauchbar.

II. Teil.

Navigation in der Ebene.

Beispiele.

§ 4.

Gestalt der Bahnkurven $v_1 = 0$, $u_1 = \pm r^n$.

Die folgende Betrachtung[5] geht aus von der Gleichung der Extremalen in der Form:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{r}{a\,c} \sqrt{r^2 + a^2 r^{2n} - a^2 c^2} = \pm \frac{r}{a\,c} \sqrt{f(r)}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet an gewissen Stellen $r = \alpha$, die Wurzeln von $f(r) = 0$ sind. An diesen Stellen ist wegen

[5] Kober: Konjug. kin. Brennp. Diss. Breslau 1910.

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = \frac{r}{a\,c}\left[r^2 + a^2 r^{2n} - a^2 c^2 + r^2 + n\,a^2 r^{2n}\right]$$

$$\left[\frac{d^2 r}{d\varphi^2}\right]_{r=\alpha} = \frac{\alpha}{ac}\left[\alpha^2 + n\,a^2\,\alpha^{2n}\right].$$

Da dies bis auf die Fälle, in denen der Radikand eine Doppelwurzel hat, $\neq 0$ ist, tritt an ihnen in $\varphi - \varphi_1 = \int_{r_1}^{r} \frac{ac\,dr}{r\sqrt{f(r)}}$ ein Vorzeichenwechsel ein, und zugleich ist r als Funktion von φ ein Maximum oder Minimum. Setzt man fest, daß an diesen Stellen $\varphi = \varphi_0$ sei, so kann man sagen, daß die Extremalen aus zwei zur Geraden $\varphi = \varphi_0$ symmetrischen Teilen bestehen. Sie brauchen nur für $a \geqq 0$ betrachtet zu werden, denn negatives a gibt dieselben Kurventypen. Sodann sollen nur positive r zugelassen werden. Dann ergibt sich:

1. $n > 1$.

$$\varphi - \varphi_1 = \pm \int_{r_1}^{r} \frac{ac\,dr}{r\sqrt{f(r)}}.$$

Aus Realitätsgründen muß sein $f(r) = r^2 + a^2 r^{2n} - a^2 c^2 \geqq 0$. Nun hat $f(r)$ die Ableitung $f'(r) = 2r(1 + n\,a^2 r^{2n-2}) \geqq 0$. $f(r)$ ist also eine im Intervall $0 \leqq r \leq +\infty$ monoton steigende Funktion von r. Weil $f(0) = -a^2 c^2 < 0$ ist, hat $f(r)$ eine einzige und zwar einfache Nullstelle $\alpha > 0$. Es konvergiert $\int_{\alpha}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{f(r)}}$ in $\alpha < r < \infty$. Dasselbe gilt für $\int_{r}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{f(r)}}$ in $\alpha < r < \infty$. Der Winkelraum $2\omega_0 = 2\int_{\alpha}^{\infty} \frac{ac\,dr}{r\sqrt{f(r)}}$, in dem die Extremalen enthalten sind, hat endliche Größe. Es variiert $\varphi - \varphi_0$ zwischen 0 und $+\omega_0$, während r alle Werte zwischen α und $+\infty$ annimmt. Wegen $\left[\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right]_{r=\alpha} = \infty$ schneiden die Extremalen die Gerade $\varphi = \varphi_0$ im Punkte α, φ_0 rechtwinklig. Für den Winkel-

raum $2\,\omega_0$ ergibt sich unter Verwendung der Ungleichung $\frac{c^2 + \alpha^2 r^{2n-2} - \alpha^{2n}}{c^2} \geqq 1 : 2\,\omega_0 \leqq \pi$. Die Bahnkurven sind hyperbelähnlich und gegen den Koordinatenursprung konvex.

2. $0 < n < 1$.

Die Untersuchung bleibt im wesentlichen dieselbe wie unter 1. Jedoch wird wegen $\frac{c^2 + \alpha^2 r^{2n-2} - \alpha^{2n}}{c^2} \leqq 1 : 2\,\omega_0 \geqq \pi$. Die Extremalen sind hyperbelähnliche, gegen den Nullpunkt des Koordinatensystems konkave Kurven.

3. $n < 0$, $n = -m$.

$$\varphi - \varphi_1 = \pm \int_{r_1}^{r} \frac{ac\,dr}{r\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{r^{2m}} - a^2 c^2}} = \pm \int_{r_1}^{r} \frac{ac\,dr}{r\sqrt{f(r)}}.$$

Der Radikand der Wurzel muß positiv sein. Nun hat die Funktion $r^2 + \frac{a^2}{r^{2m}}$ folgenden Verlauf: Sie hat an der Stelle $r = 0$ den Wert $+\infty$, nimmt sodann ein Minimum μ an und wird für $r \to \infty$ unendlich groß. Je nachdem $\mu > a^2 c^2$, $< a^2 c^2$, $= a^2 c^2$ ist, ist der Radikand im Intervall $0 \leqq r \leqq +\infty$ immer positiv, hat zwei Nullstellen oder eine. Demgemäß werden diese Fälle unterschieden:

A. $\mu > a^2 c^2$.

Die Extremalen umfassen den Winkelraum $2\,\omega_0 = 2\int_0^{\infty} \frac{ac\,dr}{r\sqrt{f(r)}}$, der wegen der Konvergenz von $\int_0^r \frac{dr}{r\sqrt{f(r)}}$ und von $\int_r^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{f(r)}}$ in $0 < r < +\infty$ einen endlichen Wert hat. In diesem Winkelraum nimmt r symmetrisch zu $\varphi = \varphi_0{}^1$, wo $r = 0$ sei, alle Werte von $r = 0$ bis $r = +\infty$ an. Wegen $\left[\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right] r = 0 = 0$ liegt im Punkte $r = 0$, $\varphi = \varphi_0{}^1$ eine Spitze.

Die Bahnkurven gehen vom Nullpunkt, wo sie eine Spitze haben, symmetrisch zur Geraden $\varphi = \varphi_0{}^1$ aus und laufen auf die Geraden $\varphi = \varphi_0{}^1 \pm \omega_0$ asymptotisch zu.

B. $\mu < a^2 c^2$.

Der Radikand der Wurzel hat zwei Nullstellen $\alpha, \beta : 0 < \alpha < \beta$. Die Extremalen bestehen aus zwei nicht zusammenhängenden Teilen: $\beta \leqq r \leqq +\infty$, $0 \leqq r \leqq \alpha$. Im Falle

B 1. $\beta \leqq r \leqq +\infty$

wird die Extremale dargestellt durch $\varphi - \varphi_0 = \pm \int_\beta^r \frac{ac\,dr}{r\sqrt{f(r)}}$ und schneidet die Gerade $\varphi = \varphi_0$ in $r = \beta$, $\varphi = \varphi_0$ rechtwinklig, weil $\left[\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right] r = \beta = \infty$ ist. Der Winkelraum, in dem sie verläuft, ist festgelegt durch $2\omega_0 = 2\int_\beta^\infty \frac{ac\,dr}{r\sqrt{f(r)}}$, hat endliche Größe und ist wegen $\frac{r^{2m+2}(c^2\beta^{2m} - 1) - \beta^{2m+2}}{c^2\beta^{2m} r^{2m+2}} < 1 : \geqq \pi$. Die Bahnkurven sind hyperbelähnlich und gegen das Zentrum konkav, oder es sind hyperbelartig geöffnete Doppelspiralen.

B 2. $0 \leqq r \leqq \alpha$.

Die Kurven liegen ganz im Kreise $r = \alpha$ und symmetrisch zur Geraden $\varphi = \varphi_0$. Im Punkte $r = \alpha$, $\varphi = \varphi_0$ schneiden sie diese Gerade rechtwinklig, denn in ihm ist $\left[\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right] r = \alpha = \infty$ Wenn $\varphi - \varphi_0$ sich zwischen 0 und $\pm\omega_0 = \pm\int_0^\alpha \frac{ac\,dr}{r\sqrt{f(r)}}$ ändert, das von endlicher Größe ist, durchläuft r das Intervall $\alpha \geqq r \geqq 0$. Im Punkte $r = 0$ berührt die Kurve die Geraden $\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0$. Denn dort ist $\left[\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right] r = 0 = 0$ Also liegt in diesem Punkte eine Ecke.

Der Winkelraum ω_0 ergibt sich durch Abschätzung: $\omega_0 > \frac{\pi}{2m}$.

Die Bahnkurven sind geschlossene, nierenförmige Kurven mit einer Ecke im Nullpunkt.

C. $\mu = a^2 c^2$.

Der Radikand hat eine Doppelwurzel $\alpha = \beta$. Deshalb geht $\int_r^{\alpha} \frac{dr}{r\sqrt{f(r)}}$ für $\left\{\begin{matrix} 0 < r < \alpha \\ \alpha < r < +\infty \end{matrix}\right\}$ gegen Unendlich. Die Extremalen setzen sich aus zwei voneinander zu unterscheidenden Teilen zusammen:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_0^r \frac{ac\,dr}{r\sqrt{f(r)}} : 0 \leqq r \leqq \alpha;$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\infty}^r \frac{ac\,dr}{r\sqrt{f(r)}} : \alpha \leqq r \leqq +\infty.$$

Für den ersten Teil gilt: Während r von 0 bis α wächst, nimmt $\varphi - \varphi_0$ alle Werte zwischen Null und Unendlich an. Im Punkte $r = 0$ treten wegen $\left[\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right]_{r=0} = 0$ Ecken auf. Es entstehen Spiralen, die sich dem Kreise $r = \alpha$ von innen asymptotisch nähern. Über den zweiten Teil läßt sich aussagen: Während r von ∞ bis α abnimmt, ändert sich $\varphi - \varphi_0$ zwischen 0 und ∞. Die Extremalen kommen aus dem Unendlichen und umschließen den Kreis $r = \alpha$ von außen asymptotisch.

Das Vorzeichen von u_1 hat keinen Einfluß auf die Gestalt der Bahnkurven.

Die Durchlaufungsrichtung der Extremalen ergibt sich folgendermaßen: Es ist

$$u_1 + c\cos\vartheta_1 = \frac{\sqrt{r^2 - a^2(c^2 - u_1^2)}}{a^2 u_1^2 + r^2}\left[u_1\sqrt{r^2 - a^2(c^2 - u_1^2)} \pm c\,r\right]$$

Ist nun $u_1^2 > c^2$, so wird, wenn man sich beispielsweise auf $u_1 > 0$ beschränkt und die Scheitel: $r^2 - a^2(c^2 - u_1^2) = 0$ ausschließt, $u_1\sqrt{r^2 - a^2(c^2 - u_1^2)} \pm c\,r > 0$. Die Extremalen-

Fig. 1

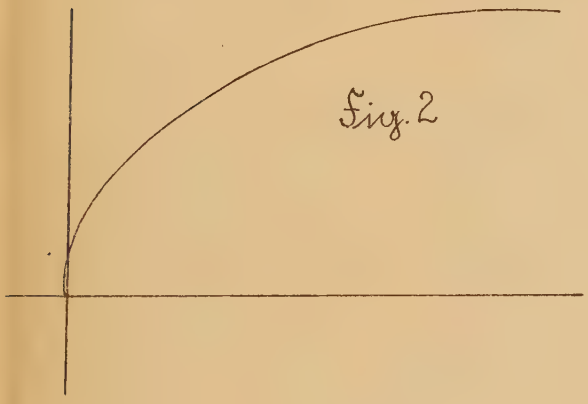


Fig. 2

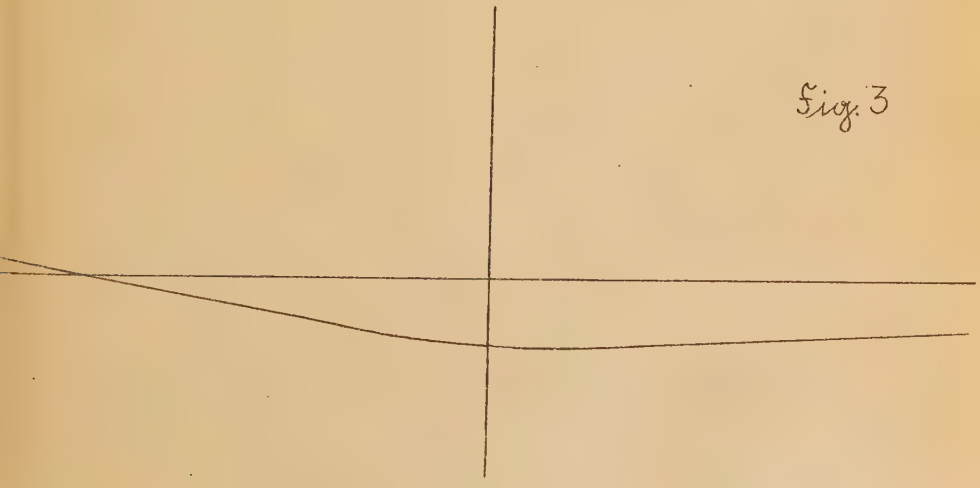


Fig. 3

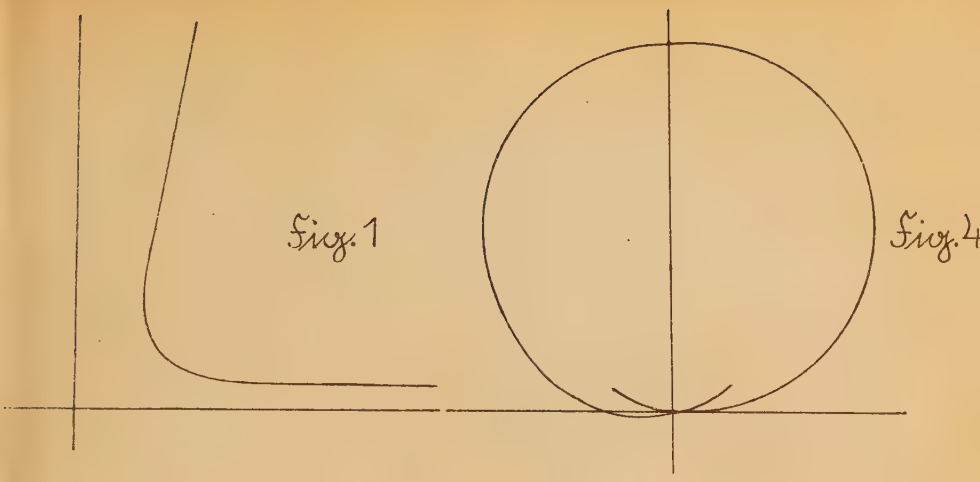


Fig. 4

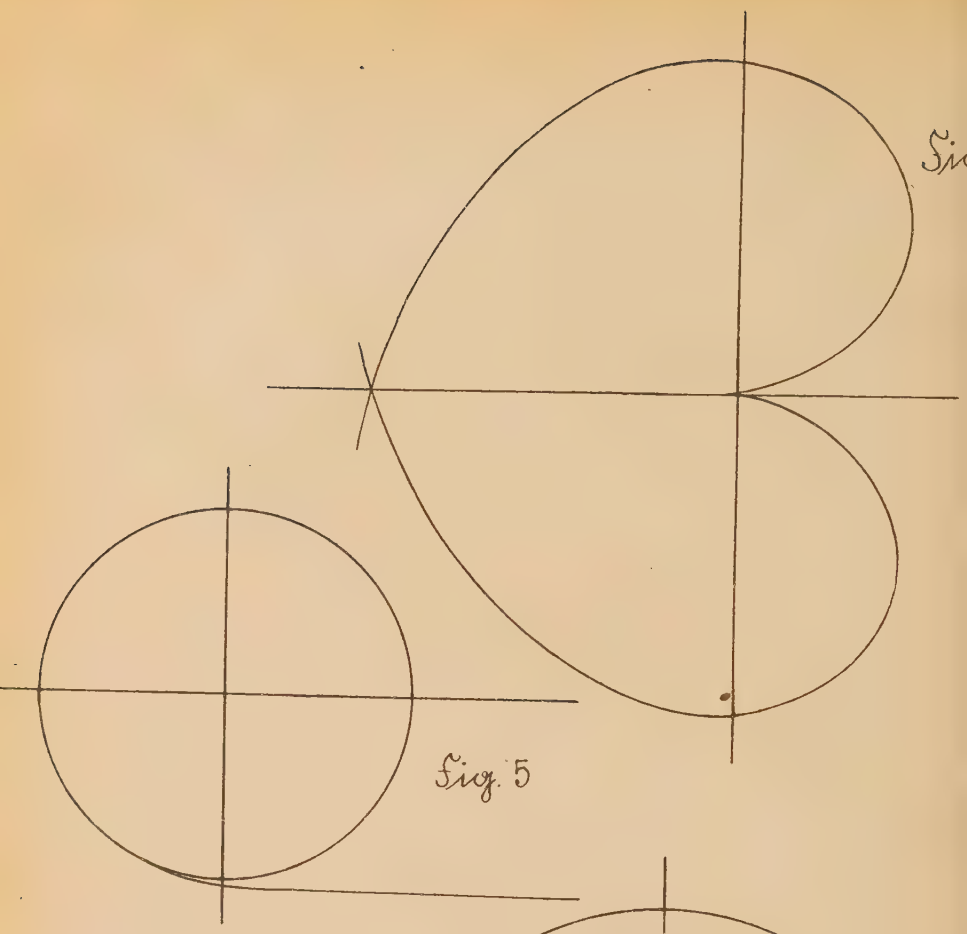
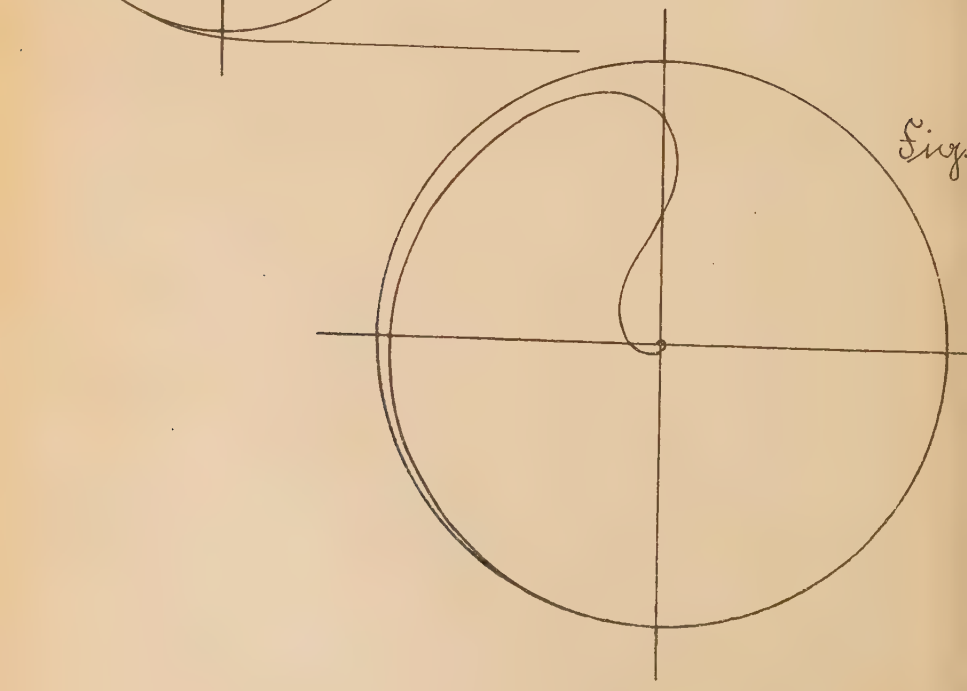


Fig. 5



bogen müssen im Sinne wachsender r durchlaufen werden. Wenn $u_1^2 < c^2$ ist, wird $u_1 \sqrt{r^2 - a^2 (c^2 - u_1^2)} + c\,r > 0$, $u_1 \sqrt{r^2 - a^2 (c^2 - u_1^2)} - c\,r < 0$, sodaß man im ersten Falle den Extremalenbogen im Sinne wachsender r, im zweiten Falle im Sinne kleiner werdender r durchlaufen muß.

Über die Scheitel kann man nicht fortgelangen. Denn in ihnen sind Steuerrichtung und Windrichtung entgegengesetzt und der Betrag der Geschwindigkeit des Luftschiffes ist gleich dem des Windes. Man muß diese Punkte aus der Betrachtung ausschließen. Dasselbe gilt für die Punkte, die der Gleichung $u_1 \sqrt{r^2 - a^2 (c^2 - u_1^2)} \pm c\,r = 0$ genügen.

§ 5.

Konjugierte Punkte.[6]

Gemäß den am Anfang des § 4 gemachten Bemerkungen ist es notwendig, zwischen einem oberen Teil der Extremalen und einem unteren zu unterscheiden. Als oberen bezeichnen wir $\varphi - \varphi_0 = \int_\alpha^r \frac{a\,c\,dr}{r\sqrt{f(r)}}$. Für zwei Punkte $P_1 (r_1, \varphi_1)$, $P (r, \varphi)$ oberhalb $P_0 (\alpha, \varphi_0)$ gilt dann:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \int_\alpha^{r_1} \frac{a\,c\,dr}{r\sqrt{f(r)}}, \quad \varphi - \varphi_0 = \int_\alpha^{r} \frac{a\,c\,dr}{r\sqrt{f(r)}},$$

also:

$$\varphi - \varphi_1 = \int_{r_1}^{r} \frac{a\,c\,dr}{r\sqrt{f(r)}}.$$

Für einen Punkt $P (r, \varphi)$ unterhalb $P_0 (\alpha, \varphi_0)$ ist dagegen:

$$\varphi - \varphi_1 = \int_{r_1}^{\alpha} \frac{a\,c\,dr}{r\sqrt{f(r)}} + \int_{r}^{\alpha} \frac{a\,c\,dr}{r\sqrt{f(r)}}.$$

Damit ein Punkt P_1 auf der oberen Hälfte auf dieser einen konjugierten Punkt $P (r, \varphi)$ habe, muß sein:

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{r_1}^{r} \frac{a\,c\,dr}{r\sqrt{f(r)}} = \int_{r_1}^{r} \frac{c\,r^2\,dr}{r\sqrt{r^2 + a^2 r^{2n} - a^2 c^2}^3} = 0.$$

[6] Kneser; s. o. S. 125.

Das ist wegen des beständig positiven Vorzeichens des Integranden nicht möglich, außer für $r = r_1$, $\varphi = \varphi_1$. Auf der oberen Hälfte hat P_1 keinen konjugierten Punkt. Ein konjugierter Punkt auf der unteren Hälfte müßte die Gleichung befriedigen:

$$\Psi(r_1, \alpha) + \Psi(r, \alpha) = 0,$$

wo gesetzt ist: $\Psi(r, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\alpha}^{r} \frac{ac\, dr}{r \sqrt{f(r)}}$ und a durch α ausgedrückt werden muß.

1. $n > 1$.

Der Ansatz $r = \alpha t$, wo $a^2 = \frac{\alpha^2}{c^2 - \alpha^{2n}}$ ist, führt $\Psi(r, \alpha)$ über in:

$$\Psi(r, \alpha) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 (c^2 - \alpha^{2n}) + \alpha^2 r^{2n}}{c^2}} - \alpha^2}$$

$$- \int_1^{\frac{r}{\alpha}} \frac{n \alpha^{2n-1} t (t^{2n-2} - 1)\, dt}{c^2 \sqrt{\frac{t^2 (c^2 - \alpha^{2n}) + \alpha^{2n} t^{2n}}{c^2}} - 1}^3.$$

Das Integral in dieser Funktion existiert, und die Funktion selbst ist beständig negativ, denn es ist $t \geqq 1$. Daraus ist zu ersehen, daß die Gleichung $\Psi(r_1, \alpha) + \Psi(r, \alpha)$ keine Lösung besitzt.

2. $0 < n < 1$.

$\Psi(r, \alpha)$ ergibt ausgerechnet dasselbe wie $\Psi(r, \alpha)$ unter 1. Das Integral in dieser Funktion existiert gleichfalls; aber während $\lim_{r = \alpha} \Psi(r, \alpha) = -\infty$ ist, konvergiert $\Psi(r, \alpha)$ für $r \to \infty$ gegen einen positiven Grenzwert. Ist dieser λ, so werden auch die Werte 0 und $-\lambda$ angenommen. Bezeichnet man diese Stellen mit r_0 bezw. $r - \lambda$, so hat jeder Punkt P_1 (r_1, φ_1), für den $r - \lambda < r_1 < r_0$ ist, einen konjugierten Punkt auf der anderen Hälfte. Dieser ist, wie aus dem letzten Abschnitt des vorigen Paragraphen hervorgeht, nicht erreichbar.

3. $n < 0, n = -m$.

Auf der oberen oder unteren Hälfte allein existiert kein konjugierter Punkt.

A. $\mu > a^2 c^2$.

Die Extremalen weisen im Koordinatenmittelpunkt eine Ecke auf. Deshalb, und weil $f(r)$ keine reelle Nullstelle α hat, gelten die zur Geraden $\varphi = \varphi_0$[1] symmetrisch liegenden Teile als nicht zusammengehörig, und auf jedem solchen Teile kann es einen konjugierten Punkt nicht geben.

B 1. $\mu < a^2 c^2$, $\beta \leqq r \leqq +\infty$.

Vermöge des Ansatzes $r = \beta t$, $a^2 = \frac{\beta^{2m+2}}{c^2 \beta^{2m} - 1}$ erhält man:

$$\Psi(r, \beta) = -\left[\frac{1}{\beta \sqrt{\frac{t^2 (c^2 \beta^{2m} - 1)}{c^2 \beta^{2m}} + \frac{1}{c^2 \beta^{2m} t^{2m}} - 1}}\right]_{t = \frac{r}{\beta}}$$

$$- \int_1^{\frac{r}{\beta}} \frac{m \left(t^2 - \frac{1}{t^{2m}}\right) dt}{c^2 \beta^{2m+1} t \sqrt{\frac{t^2 (c^2 \beta^{2m} - 1)}{c^2 \beta^{2m}} + \frac{1}{c^2 \beta^{2m} t^{2m}} - 1}^3}.$$

Auch hier existiert das Integral und wegen $t \geqq 1$ ist $\Psi(r, \beta)$ beständig negativ. $\Psi(r_1, \beta) + \Psi(r, \beta) = 0$ hat also keine Wurzel.

B 2. $0 \leqq r \leqq \alpha$.

Hier sieht die Funktion $\Psi(r, \alpha)$ genau so aus wie $\Psi(r, \beta)$ unter B 1. Da in $\Psi(r, \alpha)$ jedoch $0 \leqq t \leqq 1$ ist und das Integral von 1 bis t erstreckt wird, ist $\Psi(r, \alpha)$ wiederum beständig negativ. Daher ist $\Psi(r_1, \alpha) + \Psi(r, \alpha) \neq 0$.

C. $\mu = a^2 c^2$.

Da die einzelnen Teile der Extremalen, von denen der eine ins Unendliche läuft, der andere im Zentrum eine Spitze aufweist, sich dem Kreise $r = \alpha$ asymptotisch nähern, sind die, über jeden Teil, der $r = \alpha$ nicht enthält, gemachten Aussagen anwendbar. Es gibt keinen konjugierten Punkt.

Insgesamt kann festgestellt werden: Konjugierte Punkte treten nur im Falle $0 < n < 1$ auf, können jedoch nicht erreicht werden.

Die hier erlangten Ergebnisse finden sich bestätigt an folgenden, elementar oder mit elliptischen Funktionen lösbaren Beispielen:

$n = 2$: Hyperbeln, keine konj. Punkte.

$n = 1$: Gerade Linien, keine konj. Punkte.

$$n = \frac{1}{2} : r = \frac{2\,c^2}{1 - \sqrt{1 + \frac{4\,c^2}{a^2}}\sin(\varphi - b)},$$ es existiert

zu jedem Punkt ein konjugierter. Dieser liegt bezüglich des Zentrums dem Ausgangspunkt diametral gegenüber, läßt sich jedoch nicht erreichen.

$$n = -1 \begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{c\,k}{\sqrt{1 + k^2}}\,\mathrm{sn}\,u, \quad \varphi - b = -\sqrt{1 + k^2}\,u \\ r = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{c}\,\mathrm{sn}\,u, \quad \varphi - b = \sqrt{1 + k^2}\,u \end{cases} \Big\} \text{keine konj. Punkte}$$

Diesen Beispielen gehören die Figuren 1 — 6 an:

1. $n = 2$. 2. $n = 0$, $c < 1$. 3. und 4. $n = -1$.

Die Figuren 5 und 6 entsprechen den entarteten Fällen:

$$n = -1 : r = A\,\mathcal{C}otg\left(\pm\frac{\varphi - b}{\sqrt{2}}\right),\ r = A\,\mathcal{T}g\left(\pm\frac{\varphi - b}{\sqrt{2}}\right)$$

§ 6.

Sonstige Ergebnisse.

Außer $v_1 = 0$, $u_1 = \pm r^n$ sind noch

$$v_1 = 0,\ u_1 = \pm\sqrt{c^2 - r^{2n+2}};\ u_1 = 0,\ v_1 = \pm r^n;$$

$$u_1 = c,\ v_1 = r^n$$

mit ganzzahligem n einer näheren Untersuchung unterzogen worden.

Das erste dieser Beispiele erfordert wegen der Realität von $u_1 : \sqrt[n]{c^{n+1}} \geq r^n$ und wegen der Gleichung der Extremalen: $\frac{1}{a} > r^n$.

Ist nun $c^{\frac{n}{n+1}} > \frac{1}{a}$, so sind im Falle $n > 0$ die Bahnkurven in Kreisen $r = \alpha$ enthaltene Doppelspiralen, die den Nullpunkt des Koordinatensystems unendlich oft umschlingen. Für $n < 0$ ergeben sich hyperbelähnliche Kurven oder hyperbelartig geöffnete Doppelspiralen. Ist $c^{\frac{n}{n+1}} < \frac{1}{a}$, so bestehen die Extremalen aus zwei nicht zusammenhängenden Teilen. Konjugierte Punkte treten auf für $n > 0$ und für $n < 0$ — wie in § 5 — nur in einem Intervalle: $r - \lambda < r < r_0$ und nur, wenn $c^{\frac{n}{n+1}} > \frac{1}{a}$ ist.

Das zweite Beispiel gestattet die genaue Diskussion der Gestaltsverhältnisse der Bahnkurven. So liefert $n > 0$, $a > 0$ entweder Doppelspiralen oder zwischen zwei im Endlichen liegenden, konzentrischen Kreisen $r = \gamma_1$, $r = \gamma_2$ enthaltene Kurven. $n > 0$, $a < 0$ gibt Spiralen, die von einem Kreise $r = \gamma$ tangential ausgehen, an einer gewissen Stelle ihren Umlaufssinn ändern und in unendlich vielen Windungen ins Unendliche laufen. $n < 0$, $a > 0$ liefert schließlich Doppelspiralen, die in Kreisen $r = \alpha$ enthalten sind und sich unendlich oft um den Koordinatenmittelpunkt schlingen, und hyperbelartige Kurven, $n < 0$, $a < 0$ hyperbelartige Kurven und Spiralen. Die Frage nach den konjugierten Punkten kann nach der Methode des § 5 nicht allgemein beantwortet werden.

Das Beispiel $u_1 = c$, $v_1 = r^n$ fördert folgende Ergebnisse: Die Gleichungen der Extremalen lassen sich, $n \neq 0$ und $n \neq 1$ vorausgesetzt, durch elementare, allgemein durchführbare Quadraturen herstellen. Es entstehen Spiralen, die sich um Kreise $r = \alpha$ asymptotisch herumschlingen oder aber den Mittelpunkt unendlich oft umkreisen. Konjugierte Punkte treten nicht auf.

Folgende Beispiele lassen sich elementar oder mit elliptischen Funktionen lösen:

$$v_1 = 0,\ u_1 = \pm\sqrt{c^2 - r^{-4}} : r^2 = k\, p\left(\frac{2(\varphi - b)}{c\,k},\ 0,\ 1\right)$$

$$v_1 = 0,\ u_1 = \pm\sqrt{c^2 - r^{-2}} : r = \frac{a}{cn\left(\frac{\sqrt{2}}{ac}(\varphi - b)\right)}\left(\mathrm{mod}\ \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$u_1 = 0,\ v_1 = r^{-1}: \begin{cases} \begin{cases} r = \dfrac{1-k}{c}\ \mathrm{sn}\,u \\ \varphi - b = -k\,u + \dfrac{1}{1-k}\left[\mathrm{E}(u) + \dfrac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\right] \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{r} = \dfrac{ck}{1-k}\ \mathrm{sn}\,u \\ \varphi - b = k\,u - \dfrac{1}{1-k}\,\mathrm{E}(u) \end{cases} \end{cases}$$

$u_1 = 0,\ v_1 = c\ :\ r = ac\,[\mathcal{C}os\,(\varphi - b) + 1]$

Die Figur 7 stellt den entarteten Fall $u_1 = 0,\ v_1 = r^{-1}, 4a^3c^2 + a^4c^4 = 0$ dar.

III. Teil.

Navigation auf der Kugel.

§ 7.

Allgemeines.

Sind x, y, z rechtwinklige Koordinaten im Raume, u, v, w die Komponenten der Windgeschwindigkeit bezüglich x, y, z im Punkte P (x, y, z) zur Zeit t und Θ und Φ räumliche Polarkoordinaten, die die Steuerrichtung im Punkte P festlegen, so ist das Problem auf der Kugel durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{dx}{dt} = c \sin\Theta \cos\Phi + u\,(x, y, z, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = c \sin\Theta \sin\Phi + v\,(x, y, z, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = c \cos\Theta + w\,(x, y, z, t)$$

und $$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Daß dabei der Radius der Kugel der Einheit gleich angenommen wurde, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Bei Einführung von Polarkoordinaten φ, ϑ auf der Kugel durch:

$$x = \sin\vartheta \cos\varphi,\ y = \sin\vartheta \sin\varphi,\ z = \cos\vartheta,$$

eines beweglichen Koordinatensystems ξ, η, ζ, das folgendermaßen festgelegt ist:

ξ-Achse: Tangente in P in der Meridianebene $\varphi = \text{const}$,

η-Achse: Tangente in P am Breitenkreise $\vartheta = \text{const}$,

ζ-Achse: Radiusvektor

und der darauf bezogenen Komponenten der Windgeschwindigkeit u_1 bezw. v_1 und w_1 ist: $w_1 = 0$

und:
$$u = u_1 \cos\varphi \cos\vartheta - v_1 \sin\varphi$$
$$v = u_1 \sin\varphi \cos\vartheta + v_1 \cos\varphi$$
$$w = -u_1 \sin\vartheta.$$

Also wird: $\cos\vartheta \cos\varphi\, \vartheta' - \sin\vartheta \sin\varphi\, \varphi' = (c \sin\Theta \cos\Phi + u)\, t'$,
$$\cos\vartheta \sin\varphi\, \vartheta' + \sin\vartheta \cos\varphi\, \varphi' = (c \sin\Theta \sin\Phi + v)\, t',$$
$$-\sin\vartheta\, \vartheta' = (c \cos\Theta \cos\Phi + w)\, t'$$

Ist weiter ϑ_1 der Winkel zwischen Steuerrichtung und ξ-Achse, so wird:

$$\cos\vartheta \cos\varphi\, \vartheta' - \sin\vartheta \sin\varphi\, \varphi'$$
$$- [c \cos\vartheta_1 \cos\varphi \cos\vartheta - c \sin\vartheta_1 \sin\varphi + u_1 \cos\varphi \cos\vartheta - v_1 \sin\varphi]\, t' = 0$$

$$\cos\vartheta \sin\varphi\, \vartheta' + \sin\vartheta \cos\varphi\, \varphi'$$
$$- [c \cos\vartheta_1 \sin\varphi \cos\vartheta + c \sin\vartheta_1 \cos\varphi + u_1 \sin\varphi \cos\vartheta + v_1 \cos\varphi]\, t' = 0$$

$$-\sin\vartheta\, \vartheta' + [c \cos\vartheta_1 \sin\vartheta + u_1 \sin\vartheta]\, t' = 0.$$

Diese drei Gleichungen sind voneinander abhängig. Legt man die erste und dritte zur weiteren Rechnung zugrunde, indem man sie $F = 0$ und $G = 0$ schreibt, dann muß wie in § 1 sein:

$$H_\vartheta - H'_{\vartheta'} = 0, \quad H_t - H'_t = 0, \quad F = 0,$$
$$H_\varphi - H'_{\varphi'} = 0, \quad H_{\vartheta_1} - H'_{\vartheta_1'} = 0, \quad G = 0,$$

wo
$$H = \lambda F + \mu G.$$

Eine Rechnung, die mit der in § 1 durchgeführten im wesentlichen übereinstimmt und stationäre Windverteilung berücksichtigt, liefert:

$$\lambda = -\frac{a_4 \sin\vartheta_1}{\sin\varphi\,(c + u_1 \cos\vartheta_1 + v_1 \sin\vartheta_1)},$$

$$\mu = -\frac{a_4 (\sin\vartheta_1 \cos\varphi \cos\vartheta + \cos\vartheta_1 \sin\varphi)}{\sin\varphi \cos\vartheta\, (c + u_1 \cos\vartheta_1 + v_1 \sin\vartheta_1)}.$$

Somit ist: $$H = \frac{a_4 (\sin \vartheta_1 \sin \vartheta \varphi' + c \cos \vartheta_1 \vartheta')}{c + u_1 \cos \vartheta_1 + v_1 \sin \vartheta_1},$$

und unter der Voraussetzung: $u_1 = u_1(\vartheta)$, $v_1 = v_1(\vartheta)$ folgt:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{a u_1 (\sin \vartheta - a v_1) \mp a c \sqrt{(\sin \vartheta - a v_1)^2 - a^2 (c^2 - u_1^2)}}{(\sin \vartheta - a v_1)^2 - a^2 c^2}$$

Dieser Ausdruck für die Steuerrichtung stimmt, wenn man $\sin \vartheta$ durch r ersetzt, mit dem für die Ebene gefundenen völlig überein.

Weiter errechnet man: $t_{12} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d \vartheta}{c \cos \vartheta_1 + u_1}$. Zeigt demnach der aus der Meridiankomponente der Eigengeschwindigkeit des Luftfahrzeuges und der Meridiankomponente der Windgeschwindigkeit zusammengesetzte Vektor vom Nordpol zum Südpol, so entfernt man sich vom Nordpol. Ist dieser Vektor umgekehrt gerichtet, so nähert man sich diesem.

Die Bahnkurven ergeben sich aus einem Variationsproblem der einfachsten Art. Ausgangspunkt dieser Betrachtung sind die ersten drei Gleichungen dieses Paragraphen. Diese ergeben nach Elimination von Θ und Φ und Auflösung nach dt:

$$dt = \frac{1}{c^2 - u^2 - v^2 - w^2} \cdot$$

$$\left[\pm \sqrt{c^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) - (u\,dy - v\,dx)^2 - (v\,dz - w\,dy)^2 - (w\,dx - u\,dz)^2} - (u\,dx + v\,dy + w\,dz) \right]$$

und $$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

In den oben eingeführten Größen φ, ϑ, u_1, v_1 schreibt sich dieser Ausdruck:

$$F = t' = \frac{1}{c^2 - u_1^2 - v_1^2} \cdot$$

$$\left[\pm \sqrt{c^2 (\vartheta'^2 + \sin^2 \vartheta \varphi'^2) - (u_1 \sin \vartheta \varphi' - v_1 \vartheta')^2} - (u_1 \vartheta' + v_1 \sin \vartheta \varphi') \right].$$

Wird angenommen, daß die Windgeschwindigkeit nur von der geographischen Breite abhänge, also von ϑ allein, dann läßt sich die Eulersche Differentialgleichung $F_\varphi - F'_{\varphi'} = 0$ sofort einmal integrieren, und das Ergebnis ist:

$$d\varphi = \frac{c\,d\vartheta}{\sin \vartheta\, w} \left[a - \frac{v_1 (\sin \vartheta - a v_1)}{u_1^2 - c^2} \right] - \frac{u_1 v_1}{u_1^2 - c^2} \frac{d \vartheta}{\sin \vartheta}$$

mit $w = \sqrt{(\sin\vartheta - a v_1)^2 - a^2 (c^2 - u_1^2)}$. Die Extremalen sind durch Quadraturen aufgefunden.

Das Vorzeichen der Wurzel im Ausdruck für t' entscheidet die Indikatrix. Diese hat in ϑ', φ' die Gleichung:

$$\frac{(\vartheta' - u_1)^2}{c^2} + \frac{\left(\varphi' - \frac{v_1}{\sin\vartheta}\right)^2}{\frac{c^2}{\sin^2\vartheta}} = 1$$

und stellt eine Ellipse dar. Der Grundpunkt liegt außerhalb dieser Kurve, auf ihr oder in ihr, je nachdem:

$$u_1^2 + v_1^2 > c^2, = c^2, < c^2.$$

Die weitere Untersuchung liefert dieselben Ergebnisse wie das Problem in der Ebene. So stellt man auch fest, daß die Wurzel das positive Vorzeichen bekommt.

§ 8.

Beispiele.

Diskussion der Gestaltsverhältnisse $v_1 = 0$, $u_1 = \pm\sqrt{c^2 \sin^{2n+2}\vartheta}$.

$$d\varphi = \pm \frac{a c \, d\vartheta}{\sin^2\vartheta \sqrt{1 - a^2 \sin^{2n}\vartheta}}.$$

Die Abschätzung der Winkelräume, in denen diese Kurven enthalten sind, empfiehlt den Ansatz $\sin\vartheta = u$. Dadurch wird: $d\varphi = \pm \frac{a c \, du}{u^2 \sqrt{(1-u^2)(1-a^2 u^{2n})}}$. Es genügt, die Diskussion auf das Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ oder $0 \leqq u \leqq 1$ und auf positive a zu beschränken. Unterschieden muß werden $c \geqq 1$, $c < 1$; $n > 0$, $n < 0$; $a > 1$, $a < 1$.

$c \geqq 1$. 1. $n > 0$.

A. $a < 1$.

Im Intervall $0 < \vartheta < \pi$ verschwindet $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ nicht. Am Äquator ist deshalb ϑ eine zunehmende oder abnehmende Funktion von φ. Die Extremalen müssen über den Äquator hin reichen. Wird $u^2 \sqrt{(1-u^2)(1-a^2 u^{2n})} = f(u)$ gesetzt, so hat $f(u)$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ nur die Nullstellen $u = 0$ und $u = 1$. Weil

$\int_0^u \frac{du}{f(u)}$ divergiert und $\int_1^u \frac{du}{f(u)}$ konvergiert, ist der Winkelraum, in dem die Extremalen oberhalb des Äquators verlaufen, unendlich groß. Diese schlingen sich vom Äquator um die Kugel herum und nähern sich dem Nordpol spiralenförmig in unendlich vielen Windungen. Unterhalb des Äquators liegt ein entsprechender Kurventeil.

B. $a > 1$.

Es verschwindet $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ im Intervall $0 < \vartheta < \pi$ an den Stellen ϑ, wo $1 - a^2 \sin^{2n}\vartheta = 0$ ist. Sind diese $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \pi - \alpha$, so ist an ihnen $\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} \neq 0$. ϑ als Funktion von φ nimmt ein Maximum oder Minimum an. Die Extremalen verbleiben auf einer Halbkugel und liegen symmetrisch zur Meridianebene $\varphi = \varphi_0$. In u hat man folgendes: $f(u)$ hat die Nullstellen $u = 0$, $u = 1$ und $u = u_0 = a^{-\frac{1}{n}}$. Die Bahnkurven sind erklärt für $0 \leqq u \leqq u_0$. Es divergiert $\int_u^0 \frac{du}{f(u)}$ und es konvergiert $\int_u^{u_0} \frac{du}{f(u)}$ gegen einen positiven endlichen Wert. Es ergeben sich Spiralen; diese verhalten sich zu $\varphi = \varphi_0$ symmetrisch und gehen auf den Nordpol und Südpol in unendlich vielen Windungen zu.

2. $n < 0$, $n = -m$.

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{u_0}^{u} \frac{ac\, u^{m-2}\, du}{\sqrt{(1-u^2)(u^{2m} - a^2)}}.$$

Es kann hier nur sein: $a < 1$. $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ verschwindet für $\vartheta = \alpha$, $\vartheta = \pi - \alpha$, wo α durch $\sin^{2m}\alpha - a^2 = 0$ bestimmt ist, oder für $u = u_0$: ${u_0}^{2m} - a^2 = 0$. u muß auf das Intervall $u_0 \leqq u \leqq 1$ beschränkt werden. Wegen $\left[\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right]_{\vartheta = \frac{\pi}{2}} \neq 0$ müssen die entstehenden Kurven zwischen den Breitenkreisen $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \pi - \alpha$ über den Äquator hin verlaufen. Dabei wird symmetrisch zu einer der

Stellen $\varphi = \varphi_0$ der Winkelraum von endlicher Größe:

$2\omega_0 = 2\int_{u_0}^{1} \frac{a\,c\,u^{m-2}\,du}{\sqrt{(1-u^2)(u^{2m}-a^2)}}$ durchmessen.

$$c < 1.$$

Die soeben durchgeführten Betrachtungen ändern sich insofern, als im Falle $n > 0$ u_1 um den Äquator herum nicht definiert ist, so daß die Bahnkurven nur so lange mit den ermittelten Extremalen zusammenfallen, wie $c \geqq \sin^{n+1}\vartheta$ ist. Im Falle $n < 0$ ist u_1 nirgends definiert.

Konjugierte Punkte.

Es werde wie oben zunächst $c \geqq 1$ vorausgesetzt. Dann gilt:

1. $n > 0$.

A. $a < 1$.

Da sich die Extremalen unendlich oft um die Pole schlingen, braucht auf ihnen oberer und unterer Teil im Sinne des § 5 nicht unterschieden zu werden. Ein zum Punkte $P_1\,(\vartheta_1, \varphi_1)$ gehöriger konjugierter Punkt $P\,(\vartheta, \varphi)$ müßte die Gleichung befriedigen:

$$\Psi(\vartheta, a) = \frac{\partial}{\partial a}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{a\,c\,d\vartheta}{\sin^2\vartheta\sqrt{1-a^2\sin^{2n}\vartheta}}$$

$$= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \frac{c\,d\vartheta}{\sin^2\vartheta\sqrt{1-a^2\sin^{2n}\vartheta^3}} = 0.$$

Das ist nicht möglich.

B. $a > 1$.

An den Stellen $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \pi - \alpha$ wechselt $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ sein Vorzeichen. Es muß oberer und unterer Teil unterschieden werden. Ein zu P_1 gehöriger konjugierter Punkt P auf der anderen Hälfte muß der Gleichung genügen: $\Psi(\vartheta_1, \alpha) + \Psi(\vartheta, \alpha) = 0$, wo:

$$\Psi(\vartheta, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{\alpha}^{\vartheta} \frac{c\,d\vartheta}{\sin^2\vartheta\sqrt{\sin^{2n}\alpha - \sin^{2n}\vartheta}}.$$

Man setzt $\vartheta = \alpha\, t$. Dadurch bekommt man:

$$\Psi(\vartheta, \alpha) = -\frac{c\,\vartheta}{\alpha \sin^2\vartheta \sqrt{\sin^{2n}\alpha - \sin^{2n}\vartheta}}$$

$$+ c \int_1^{\frac{\vartheta}{\alpha}} dt \left[\frac{1}{\sin^2 \alpha t \sqrt{\sin^{2n}\alpha - \sin^{2n}\alpha t}} - \frac{2\alpha t \cos\alpha t}{\sin^3 \alpha t \sqrt{\sin^{2n}\alpha - \sin^{2n}\alpha t}} \right.$$
$$\left. - \frac{n\alpha \cos\alpha \sin^{2n-1}\alpha}{\sin^2 \alpha t \sqrt{\sin^{2n}\alpha - \sin^{2n}\alpha t^3}} + \frac{n\alpha t \sin^{2n-1}\alpha t \cos\alpha t}{\sin^2 \alpha t \sqrt{\sin^{2n}\alpha - \sin^{2n}\alpha t^3}} \right]$$

und

$$\frac{d\Psi}{d\vartheta} = -\frac{n\, c \sin^{2n-1}\alpha \cos\alpha}{\sin^2\vartheta \sqrt{\sin^{2n}\alpha - \sin^{2n}\vartheta^3}}$$

ist von beständigem Vorzeichen. Die Wertetabelle ($\cos\alpha > 0$)

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{d\Psi}{d\vartheta} = -\infty, \qquad \lim_{\vartheta \to \alpha} \frac{d\Psi}{d\vartheta} = -\infty$$

$$\lim_{\vartheta \to 0} \Psi(\vartheta) = +\infty, \qquad \lim_{\vartheta \to \alpha} \Psi(\vartheta) = -\infty$$

zeigt, daß $\Psi(\vartheta)$ im Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq \alpha$ jeden reellen Wert annimmt. Die Gleichung $\Psi(\vartheta_1, \alpha) + \Psi\vartheta, \alpha) = 0$ hat eine Lösung und jeder Punkt P_1 hat einen konjugierten Punkt P. Rückt P_1 auf den Scheitel der Kurve: $\vartheta = \alpha$, $\varphi = \varphi_0$ zu, so entfernt sich P vom Scheitel.

2. $n < 0$.

Die Kurven hängen am Äquator zusammen. Wie unter B weist man nach, daß in der Regel ein Punkt P_1 einen konjugierten Punkt jenseits des Scheitels besitzt.

Der Fall $c < 1$ bedarf keiner weiteren Erörterung. Gewisse Bahnkurven sind in der Nähe des Scheitels plötzlich abbrechende Kurven. Jeder der Einzelbogen enthält aber, wie unter 1 A nachgewiesen worden ist, keinen konjugierten Punkt.

Wie in § 5 muß hier darauf hingewiesen werden, daß, wenn auch konjugierte Punkte gefunden wurden, man diese nicht erreichen kann. Denn zwischen ihnen liegt der Scheitel der Kurve, der wegen $c \cos\vartheta_1 + u_1 = 0$ ausgeschlossen werden muß.

Einzelne Beispiele lassen sich elementar oder mit elliptischen Funktionen lösen. Es sind dies die folgenden: $c \geqq 1$.

$v_1 = 0, u_1 = \sqrt{c^2 - \sin^2 \vartheta}$; $\varphi - b = \frac{a c}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{cotg} \vartheta$, kein konjugierter Punkt.

$$v_1 = 0, v_1 = \sqrt{c^2 - \sin^4 \vartheta}: \begin{cases} \begin{cases} \vartheta = \operatorname{am} u; \ \varphi - b = a c \left\{ u - E(u) \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \right\} \text{ kein konjug. Punkt} \end{cases} \\ \begin{cases} \vartheta = \arcsin (k \operatorname{sn} u) \qquad a > 1 \\ \varphi - b = \frac{c}{k^2} \left\{ u - E(u) - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \right\} \\ \text{konjug. Punkte} \end{cases} \end{cases}$$

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Die Frage nach der Steuerrichtung in der Ebene ist durch Behandlung der Aufgabe als Mayersches Problem beantwortet worden. Dabei ergibt sich in der Regel in jedem Punkte einer Extremale eindeutige Fortschreitungsrichtung. Für die Scheitel der entstehenden Kurven gilt dies nicht.

Hinsichtlich der Extremalen läßt sich die Aufgabe als einfachstes Variationsproblem behandeln. Es ist möglich, die Extremalen durch Quadratur allgemein herzustellen.

Die Indikatrix von Caratheodory zeigt das Erfülltsein der Legendreschen Bedingung und der Bedingung von Weierstraß. Sie gibt außerdem an, welche Winkelräume für ein Fortschreiten auf den Extremalen in Betracht kommen.

Einer näheren Diskussion sind die Beispiele zugänglich:

$$v_1 = 0, \ u_1 = \pm r^n; \qquad u_1 = c, \ v_1 = r^n;$$

$$v_1 = 0, \ u_1 = \pm \sqrt{c^2 - r^{2n+2}}; \qquad u_1 = 0, \ v_1 = \pm r^n.$$

Das erste von diesen Beispielen ist hier durchgerechnet worden. Als Bahnkurven ergeben sich dabei:

Hyperbelartige Kurven,
einfache Spiralen und Doppelspiralen,
hyperbelartig geöffnete Doppelspiralen,
nierenförmige, geschlossene Kurven.

Konjugierte Punkte treten unter geeigneten Bedingungen auf.

Das Problem auf der Kugel ähnelt dem in der Ebene in seiner analytischen Form. Die Untersuchung verläuft im wesentlichen auch so wie bei diesem. Als Beispiel für Bahnkurven, auf denen konjugierte Punkte auftreten können, ist der Fall diskutiert worden:

$$v_1 = 0,\ u_1 = \pm \sqrt{c^2 - \sin^{2n+2} \vartheta}.$$

Zum Schluß meiner Arbeit erfülle ich die angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Radon für die Zuweisung des Themas und das gütige Interesse, mit dem er meine Arbeit verfolgt und gefördert hat, ergebenst zu danken.

Lebenslauf.

Ich, Kurt Zita, bin am 6. März 1908 zu Breslau als Sohn des Maßschneiders Franz Zita und seiner Ehefrau Amalie geb. Kanczok geboren. Meine Religionsangehörigkeit ist evangelisch. Nach dem Besuche einiger Breslauer Schulen trat ich Ostern 1924 in die Bender-Oberrealschule ein, die ich Ostern 1927 mit dem Reifezeugnis verließ. Seitdem widme ich mich dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie, im besonderen von Ostern 1927 bis Herbst 1928 und von Ostern 1929 bis heute an der Universität Breslau, im Wintersemester 1928/29 an der Universität in Göttingen.

An der Universität Breslau nahm ich an den Vorlesungen, Übungen und Seminaren der folgenden Herren Professoren und Dozenten teil: Arndt, Bartels, Baur, Biltz, Hahn, Hoheisel, Hönigswald, Kneser†, Kothe, Kühnemann, Julius Meyer, Rademacher, Radon, Reiche, Schaefer, Schulemann, Schur, Senftleben, Sternberg, Steubing, Strauß, Wacholder; in Göttingen: Born, Franck, Herglotz, Hertz, Jander, Lewy, Nordheim, Pohl, Reich, Windaus, Zimmermann. Allen meinen verehrten Lehrern spreche ich für vielfache Förderung meinen Dank aus.